Hatsi-kD: Vuistregels in de hydrologie

Matthijs Bonte, Willem Jan Zaadnoordijk en Kees Maas[1]

In Hatsi-kD vuistregel 77 (Maas, 2010) is een analytische vergelijking gegeven voor de flux door een gat in een scheidende laag tussen twee watervoerende pakketten (vgl 18, hatsi-kD):

$$Q = \pi \Delta H \bar{k} 2R \tag{1}$$

Waarin: Q de lekflux (m^3/d) is, ΔH het stijghoogteverschil tussen de twee watervoerende pakketten (m), R de straal van het gat (m), D de dikte van de scheidende laag (m) en $\bar{k}$ is het harmonisch gemiddelde van de doorlatendheden van de twee aquifers die door het lek worden kortgesloten (m/d). Als er sprake is van anisotropie, en een anisotropiefactor van ~10 wordt meegenomen, vervalt de factor π. Hierbij wordt opgemerkt dat vgl 2 van Vuistregel 77 een fout bevat: de factor ½ is verkeerd meegenomen van de afleiding (bij het herschrijven van het harmonisch gemiddelde in vgl 18 van de afleiding vervalt deze; vgl 18 is de correcte).
Deze vergelijking beschouwt het 'gat' als oneindig doorlatend, zodat er geen stijghoogteverschil over het gat is. Dit zal praktisch gezien niet zo snel voorkomen; er kan zand meestromen of naar beneden vallen vanuit omliggende watervoerende lagen waardoor het gat zelf ook een zekere doorlatendheid (hier k_{fill} genoemd) krijgt. Een breder toepasbare vergelijking, die ook rekening houdt met deze doorlatendheid is de volgende:

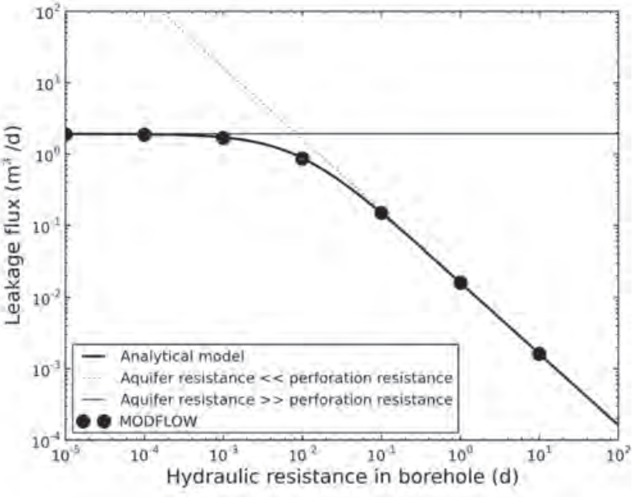
Vuistregel 78:
Stroming door gat in scheidende laag tussen twee watervoerende pakketten

$$Q = \frac{R\Delta H}{\dfrac{D}{k_{fill}\pi R} + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}\right)} = \frac{R\Delta H}{\dfrac{D}{k_{fill}\pi R} + \dfrac{1}{2\bar{k}}} \tag{2}$$

Waarin k_1 en k_2 de doorlatendheden van het boven- en onderliggende watervoerende pakket, respectievelijk (m/d). In afbeelding 1 is het verloop van de lekflux weergegeven als functie van de weerstand in het gat. Tevens zijn weergegeven enkele validatieberekeningen met een Modflow model en twee aanvullende lijnen: 1) waarbij de weerstand in het gat veel groter is dan in de gecombineerde watervoerende pakket-

1 Matthijs Bonte, Amsterdam, matthijsbonte@gmail.com; Willem Jan Zaadnoordijk, KWR Watercycle Research Institute, Nieuwegein, WillemJan.Zaadnoordijk@kwrwater.nl; Kees Maas, Middelburg, kmaas@xs4all.nl

ten, de flux vereenvoudigt dan tot vgl 10 (zie in afleiding hieronder), en 2) de situatie waarbij het gat oneindig (of in ieder geval veel) doorlatender is dan het watervoerend pakket). Voor nadere details over de vergelijking met het Modflow model, zie: Bonte e.a. (2014). De flux kan dan worden beschreven met vergelijking 18 uit de genoemde Hatsi-kD (vgl 1).
Deze vergelijking kent echter ook zijn beperkingen. Zoals hieronder in de afleiding is beschreven, is aangenomen dat het gat zich in een scheidende laag tussen twee oneindige aquifers (3D) bevindt. Hierdoor hoeven geen randvoorwaarden (zoals vaste stijghoogte op een bepaalde afstand) gedefinieerd te worden en wordt een zeer eenvoudige vergelijking gevonden ten opzichte van eerdere pogingen (zie bijvoorbeeld Avci, 1992, 1994). Dit betekent wel enige voorzichtigheid moet worden betracht als het gat direct naast een sloot ligt, of als een van de watervoerende pakketten heel dun is.



Afbeelding 1: Lekstroom door een gat als functie van weerstand in het gat (D/k_{fill}) met als parameters: k_1=10m/d, k_2=20m/d, D=10m, k_{fill} = 10^{-4} to 10^5 m/d, R=0.072m, ΔH = 1 m.

Afleiding

Beschouw een cirkelvormig gat met straal R op de bodem van een zeer dikke aquifer met doorlatendheid k. Bij een continue lekstroom Q stelt zich een eindige stationaire verlaging φ_0 in. De vlakken van gelijke verlaging zijn afgeplatte bollen die naderen tot zuiver bollen naarmate men verder van het gat af kijkt. Het ligt daarom voor de hand om van cilindercoördinaten (r, z) over te gaan op afgeplatte bolcoördinaten (μ, ζ):

$$\frac{z}{R} = \mu\zeta \quad \frac{r}{R} = \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1+\zeta^2} \tag{3}$$

De isolijnen van μ zijn dus afgeplatte bollen: de isolijnen van ζ zijn omwentelingshyperboloïden. Op het cirkelvormige gat is $\mu = 0$. Als het gat een straal 1 heeft (in het nieuwe coördinatenstelsel) dan is volgens (Tranter, 1951):

$$\varphi(\mu, \zeta) = \frac{2}{\pi}\varphi_0 \operatorname{acot}\zeta \tag{4}$$

We leggen een verband met het debiet Q. Daartoe bekijken we het verloop van φ langs de bodem van de aquifer. Daarlangs geldt $z=0$ zodat $\mu=0$, waardoor:

$$\frac{r}{R}=\sqrt{1+\zeta^2} \qquad \zeta=\sqrt{\frac{r^2}{R^2}-1} \tag{5}$$

Dit mag ook met een minteken ervoor; dan kijken we van naar links i.p.v. naar rechts. Dit in (4) geeft:

$$\varphi(0,r)=\frac{2}{\pi}\varphi_0 \operatorname{acot}\sqrt{\frac{r^2}{R^2}-1} \tag{6}$$

Voor grote waarde van zijn argument gaat acot over in de reciproke van zijn argument, zodat voor grote r geldt:

$$\varphi(0,r)\rightarrow\frac{2}{\pi}\varphi_0\frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{R^2}-1}} \tag{7}$$

of (als $r >> R$)

$$\varphi(0,r)\rightarrow\frac{2}{\pi}\varphi_0\frac{R}{r} \tag{8}$$

Op grote afstand is de stroming radiaal en kan de stroming als volgt worden beschreven:

$$Q=2\pi r^2 k\frac{d\varphi}{dr} \tag{9}$$

Hieruit wordt $\varphi(r)$ opgelost:

$$\varphi(r)=-\frac{Q}{2\pi kr} \tag{10}$$

(factor 2 wegens halve bolvormige ruimte). Gelijkstellen van (8) en (10) geeft

$$\varphi_0=-\frac{Q}{4kR} \tag{11}$$

Dit is de verlaging ten opzichte van de stijghoogte op zeer grote afstand. Nu met indices werken voor de boven- en onderliggende aquifer:

$$\begin{aligned}\varphi_1&=H_1-\frac{Q}{4k_1R}\\ \varphi_2&=H_2+\frac{Q}{4k_2R}\end{aligned} \tag{12}$$

waarin φ_1 de stijghoogte aan de bovenkant van het gat in de kleilaag is, H_1 de oorspronkelijke stijghoogte in de bovenste aquifer, etc. De flux door het gat in de kleilaag is wordt berekend met de vergelijking van Darcy:

$$Q=k_f\frac{\varphi_1-\varphi_2}{D}\pi R^2 \tag{13}$$

waarin k_f de doorlatendheid van het vulmateriaal van het gat is. (12) in (13) geeft het resultaat van deze Hatsi-kD:

$$Q = \frac{R\Delta H}{\frac{D}{k_{fill}\pi R} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)} = \frac{R\Delta H}{\frac{D}{k_{fill}\pi R} + \frac{1}{2\bar{k}}} \qquad (14)$$

Literatuur

Avci, C.B. (1992) Flow occurrence between confined aquifers through improperly plugged boreholes; in: *Journal of Hydrology*, vol 139, no 1-4, pag 97-114.

Avci, C.B. (1994) Evaluation of low leakage through abandoned wells and boreholes; in: *Water Resources Research*, vol 30, no 9, pag 2565-2578.

Bonte, M., W.J. Zaadnoordijk en K. Maas (2014) A Simple Analytical Formula for the Leakage Flux Through a Perforated Aquitard; in: *Groundwater*, DOI: 10.1111/gwat.12239.

Maas, K. (2010) HatsiKD, vuistregels in de hydrologie: Lekkende peilbuizen en slecht afgedichte boorgaten; in: *Stromingen*, vol 16, no 2&3, pag 79-83.

Tranter, J.C. (1951) Integral Transforms in Mathematical Physics; John Wiley & Sons, Incorporated.