Tussen Theis en Hantush

C. van den Akker[1]

In de publicatie "Tussen Dupuit en De Glee" in Stromingen wordt een geohydrologische situatie beschouwd met stationaire grondwaterstroming in een gedeeltelijk afgesloten watervoerend pakket. De gebiedsgemiddelde freatische grondwaterstand wordt mede bepaald door het vrij afwaterende oppervlaktewater systeem. In een daaropvolgende publicatie "Een fysische onderbouwing van de overdrachtsfactor" wordt aangetoond dat de relatie tussen de freatische grondwaterstand en de oppervlaktewaterafvoer kan worden weergegeven met een logaritmisch verloop. De afleiding van een differentiaal-vergelijking waarmee de grondwaterstand- en stijghoogteveranderingen kunnen worden berekend in het geval van stroming naar een volkomen put wordt daarmee mogelijk.
In de praktijk hebben we echter ook te maken met onttrekkingen (bijvoorbeeld ten behoeve van beregening) die uitgesproken tijdsafhankelijk zijn.
Op basis van de overdrachtsfactor met een hyperbolisch verloop wordt de afleiding gegeven van de partiële differentiaalvergelijking voor tijdsafhankelijke stroming naar een volkomen put in gedeeltelijk afgesloten grondwater.

Inleiding

Voor het begrijpen van het zogenoemde fenomeen achtergrondverlaging, een fenomeen dat feitelijk niet bestaat omdat het zeer wel verklaarbaar is en deel uitmaakt van de totale verlaging als gevolg van ingrepen, heb ik voor vrij afwaterende gebieden zoals die voorkomen in het zuidoosten van Nederland enkele geohydrologische formules afgeleid gebaseerd op de wet van Darcy en het continuïteitsprincipe.

Ik heb dat gedaan voor stationaire grondwaterstroming in een gedeeltelijk afgesloten watervoerend pakket waarbij de freatische grondwaterstand mede wordt beïnvloed door het oppervlaktewatersysteem. De relatie tussen de gebiedsgemiddelde freatische grondwaterstand en de oppervlaktewater afvoer per oppervlakte eenheid wordt weergegeven met een logaritmisch verband. In "Een fysische onderbouwing van de overdrachtsfactor" (Van den Akker, 2014) wordt teruggegrepen op het onderzoek (Ernst, 1971) waar een gemeten relatie wordt opgevoerd die een logaritmisch verband vertoont.

De relatie tussen de verandering van de freatische grondwaterstand en de verandering van de stijghoogte kan worden gekarakteriseerd met de overdrachtsfactor F (Van den Akker, 2013).

[1] cvandenakker@casema.nl

Deze overdrachtsfactor varieert tussen 0 en 1 waarbij voor F=0 een vaste bovenrandvoorwaarde geldt (De Glee) en voor F→1 een bovenrandvoorwaarde zonder voedingsverandering (Dupuit) wordt benaderd.

In het geval van stationaire stroming naar een volkomen put in het watervoerende pakket is het mogelijk, door gebruik te maken van de Lambert W functie, de tweede orde differentiaalvergelijking op te stellen voor dit grondwaterstromingsgeval (Van den Akker, 2013). Met behulp van MATLAB kan voor gekozen waarden van de bodemconstanten, onttrekkingshoeveelheid, geometrie en randvoorwaarden de oplossing worden berekend.

Echter ook voor tijdsafhankelijke stroming naar een volkomen put die op tijdstip t=0 begint te onttrekken kan de tweede orde, partiële differentiaalvergelijking worden opgesteld. Ook hier kan bijvoorbeeld MATLAB gebruikt worden om de oplossing te berekenen.

In dit geval beslaat de differentiaalvergelijking de stromingssituaties die zijn gelegen tussen de geohydrologische schematiseringen die gelden voor de formules van Theis en Hantush.

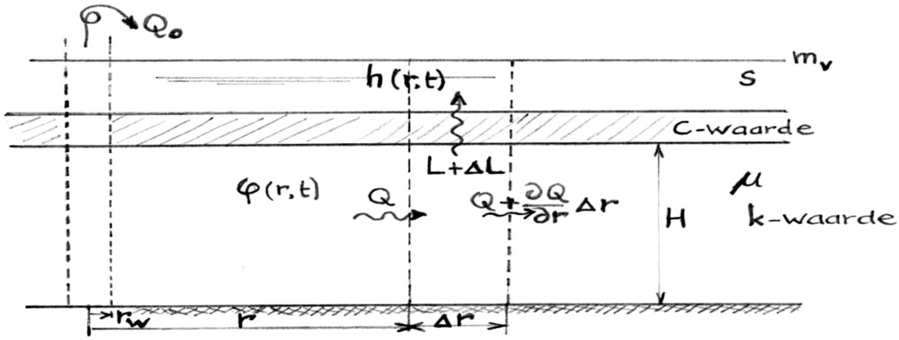
Ter toelichting: De formule van Theis geldt voor radiale tijdsafhankelijke stroming naar een put in een pakket met volkomen afgesloten grondwater maar waarin een elastische berging aanwezig is. De formule van Hantush geldt voor radiale tijdsafhankelijke stroming in een pakket met gedeeltelijk afgesloten grondwater waarin elastische berging aanwezig is. Door de afsluitende laag met een hydraulische weerstand treedt voeding op waarbij de bovenrandvoorwaarde (bijvoorbeeld de freatische grondwaterstand) constant wordt gehouden.

Afleiding van de tweede orde, partiële differentiaalvergelijking

De geohydrologische situatie wordt geschematiseerd tot een uitgestrekt homogeen watervoerend pakket met gedeeltelijk afgesloten grondwater. Het pakket heeft een relatief hoog doorlaatvermogen en wordt afgedekt door een slecht doorlatende laag met een constante hydraulische weerstand. Boven deze laag bevindt zich een relatief dun watervoerend pakket met een freatische grondwaterstand. De horizontale grondwaterstroming in dit freatische pakket wordt zeer klein aangenomen. De gebiedsgemiddelde grondwaterstand wordt mede bepaald door het vrij afwaterende oppervlaktewater systeem. Er wordt aangenomen dat er een relatie geldt tussen de gebiedsgemiddelde grondwaterstand en de oppervlaktewater afvoer per eenheid oppervlak. Voor deze relatie wordt een logaritmisch verband genomen. Een dergelijk verband is gemeten (Ernst, 1971) en is tevens aangetoond te gelden indien gebruik wordt gemaakt van de hyperbolische overdrachtsfactor (Van den Akker, 2014).

In het gedeeltelijk afgesloten grondwater is elastische berging aanwezig en het freatische pakket heeft een constante freatische bergingscoëfficiënt.

In afbeelding 1 is de geohydrologische schematisering weergegeven.



Afbeelding 1: Radiaal symmetrische stroming naar een put.

Uit de wet van Darcy volgt:

$$Q = -2\pi rkH\frac{\partial \varphi}{\partial r} \tag{1}$$

waarin:
Q = volumestroom [m³/dag]
r = poolcoördinaat [m]
k = doorlatendheid [m/dag]
H = dikte pakket [m]
φ = grondwaterstijghoogte ten opzichte van het referentie niveau [m]

Op basis van continuïteit geldt:

$$Q = Q + \frac{\partial Q}{\partial r}\Delta r + (L + \Delta L) - \mu\frac{\partial \varphi}{\partial t}(2\pi r\Delta r) \tag{2}$$

waarin:
L(eakage) = volumestroom [m³/dag]
ΔL = verandering in L ten gevolge van freatische berging [m³/dag]
μ = elastische bergingscoëfficiënt [–]

Eveneens volgt uit continuïteit:

$$L + \Delta L = -\frac{h - \varphi}{c}(2\pi r\Delta r) - s\frac{\partial h}{\partial t}(2\pi r\Delta r) \tag{3}$$

waarin:
s = freatische bergingscoëfficiënt [–]
h = grondwaterstand ten opzichte van het referentie niveau [m]

Uit vergelijking 1 volgt:

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = -2\pi kHr\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - 2\pi kH\frac{\partial \varphi}{\partial r} \tag{4}$$

Uit de vergelijkingen 2,3 en 4 volgt:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{h - \varphi}{kHc} - \frac{s}{kH}\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\mu}{kH}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{5}$$

Deze differentiaalvergelijking bevat zowel de grondwaterstijghoogte als de freatische grondwaterstand.
Uitwerking van de overdrachtsfactor resulteert in de volgende vergelijking tussen de grondwaterstand en de stijghoogte:

$$\varphi = h - m_v - b + a\, ln(-h + m_v + b) + C1 \tag{6}$$

waarin:
m_v = hoogte maaiveld ten opzichte van het referentie niveau [m]
a, b constanten, a <0, b ≤0 [m]

Stel:
$$f = -h + m_v + b$$

dan is:
$$\varphi = -f + a\, lnf + C1$$

en dus:
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{a}{f}\frac{\partial f}{\partial t} \tag{7}$$

Stel:
$$g = \varphi - C1$$

dan is:
$$g = -f + a\, lnf \tag{8}$$

Hieruit volgt:
$$-\frac{1}{a}e^{g/a} = -\frac{f}{a}e^{-f/a} \tag{9}$$

Na introductie van de Lambert W functie kan vergelijking 9 geschreven worden als:
$$W\left(-\frac{1}{a}e^{g/a}\right) = -\frac{f}{a} \tag{10}$$

Substitutie van vergelijking 10 in vergelijking 7 heeft als resultaat:
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\left\{1 + \left(W\left(-\frac{1}{a}exp\left(\frac{g}{a}\right)\right)\right)^{-1}\right\}\frac{\partial f}{\partial t} \tag{11}$$

Combinatie van vergelijking 5, 10 en 11 geeft als resultaat:
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \left\{\frac{\varphi - m_v - b - aW\left\{-\frac{1}{a}exp\left(\frac{(\varphi - C1)}{a}\right)\right\}}{kHc}\right\} +$$
$$-\frac{1}{kH}\left\{\frac{s}{1 + \left\{W\left(-\frac{1}{a}exp\left(\frac{(\varphi - C1)}{a}\right)\right)\right\}^{-1}} + \mu\right\}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{12}$$

hierin is:

$$C1 = \varphi_o - h_0 + m_v + b - a\ ln(-h_0 + m_v + b) \tag{13}$$

Om een oplossing te vinden voor de differentiaalvergelijking 12 zijn de volgende rand- en beginvoorwaarden te stellen:
Randvoorwaarde 1 ter plaatse van de omtrek van de put:

$$q_r 2\pi H r_w = Q_0$$

waarin:
q_r = volumestroomdichtheid [m/dag]
r_w = straal van de put [m]
Q_0 = onttrokken volumestroom aan de put [m^3/dag]

Randvoorwaarde 2 op grote afstand van de put ($r \rightarrow \infty$)

$\varphi = \varphi_0$

Beginvoorwaarde op het tijdstip dat de put begint te onttrekken ($t = t_0$) met een volumestroom Q_0.

Oplossing van de tweede orde partiële differentiaalvergelijking

Ook deze publicatie, evenals Van den Akker (2013 en 2014) is tot stand gekomen aan de keukentafel. Ik heb daarbij slechts de beschikking over zeer elementaire rekenfaciliteiten. MATLAB behoort daar zeker niet toe. Voor de publicatie “Tussen Dupuit en De Glee” was Ed Veling zo vriendelijk mij behulpzaam te zijn en een MATLAB script op te stellen voor de oplossing van de differentiaalvergelijking voor het stationaire stromingsprobleem. Ook voor de oplossing van vergelijking 12 zal ik weer een beroep moeten doen op anderen die wel beschikken over de benodigde faciliteiten. Ik heb echter besloten het anders te doen dan de vorige keer en wel om de volgende redenen.

Ik heb gemerkt in de discussies die ik de afgelopen tijd heb gevolgd en gevoerd dat de belangstelling voor de klassieke grondwatermechanica sterk aan het verdwijnen is. Geohydrologen gebruiken bij voorkeur numerieke modellen waarbij wordt gepretendeerd dat “alle” relaties er in zitten. Ik waag het te betwijfelen of deze relaties goed gedocumenteerd en verifieerbaar zijn voor derden en of deze relaties voldoen aan de harde fysische wetmatigheden.

Ik geloof nog altijd in de kracht van analytische oplossingen al was het alleen maar om de modellenbouwers van de talrijke numerieke modellen een mogelijkheid te bieden tot het verifiëren van modeluitkomsten in sterk geschematiseerde situaties. Het is dus zaak de belangstelling voor analytische oplossingen te stimuleren.

Ik nodig daarom jonge, fysisch/mathematisch ingestelde hydrologen, die goed kunnen omgaan met tools zoals MATLAB, uit om vergelijking 12 op te lossen, met deze oplossing een aantal voorbeeldberekeningen uit te voeren bijvoorbeeld in relatie met de beregeningsproblematiek en het resultaat samen met mij te publiceren in Stromingen. Het MATLAB script voor de stationaire oplossing van het stromingsprobleem naar een volkomen put (de situatie tussen Dupuit en De Glee) wordt ter beschikking gesteld. Overigens is ook voor andere geïnteresseerde hydrologen het MATLAB script beschikbaar.

Conclusie

De oplossing van de tweede orde partiële differentiaalvergelijking die de tijdsafhankelijke stroming naar een put beschrijft in een watervoerend pakket met gedeeltelijk afgesloten grondwater en een niet-lineaire functie tussen de grondwaterstand en de oppervlaktewater afvoer biedt inzicht in het verloop van de verlagingen van stijghoogte en grondwaterstand.

Daarmee is het een waardevolle analytische oplossing die het mogelijk maakt numerieke modelberekeningen te toetsen voor sterk geschematiseerde situaties. Aangezien wordt uitgegaan van de gebiedsgemiddelde freatische grondwaterstand wordt in de oplossing het probleem van het moeten kennen of berekenen van de drainageweerstand vermeden.

Referenties

Akker, C. van den (2013) Tussen Dupuit en De Glee; in: *Stromingen* JRG 19 nr 2

Ernst, L.F. (1971) Analysis of groundwater flow to deep wells in areas with a non-linear function for the subsurfacee drainage; in: *Journal of Hydrology* 14

Akker, C. van den (2014) Een fysische onderbouwing van de overdrachtsfactor; in: *Stromingen* JRG 20 nr 1