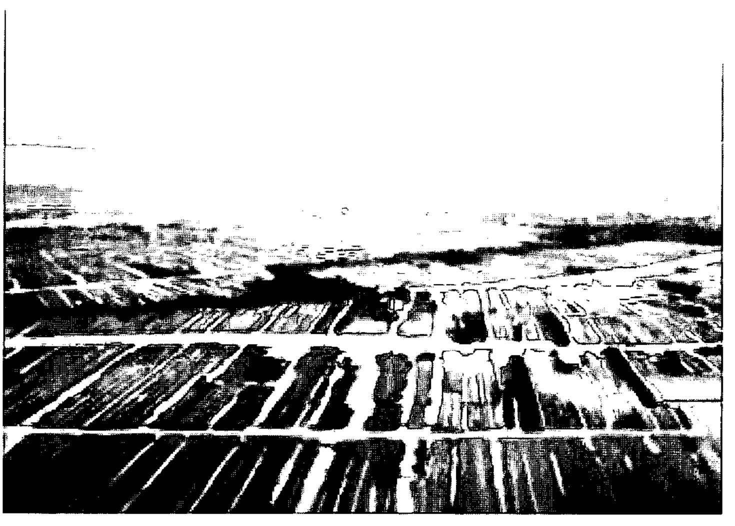
Weerstanden in het Hollandse Profiel

Kees Maas

Hollands Profiel *is vanouds de benaming voor een geohydrologisch profiel bestaande uit een watervoerende laag die afgedekt wordt door een slecht doorlatende laag, waarbij de laatste door sloten gedraineerd wordt. Dit profiel domineert in het laagliggende westelijke deel van Nederland, maar het komt ook voor in het hogere deel, bijvoorbeeld in beekdalen. Een zorgvuldige waterbeheersing is er van groot belang voor de stedelijke en rurale gebruiksfuncties. In dit artikel gebruik ik een eenvoudig model om in het Hollandse Profiel het tijdsafhankelijke verloop van de grondwaterstand te simuleren, onder invloed van variaties in aanvulling, kwel en polderpeil. Het model bevat twee parameters, die als drainageweerstand en voedingsweerstand zijn op te vatten. Ik presenteer gesloten analytische uitdrukkingen, die deze weerstanden relateren aan de slootbreedte en de perceelsbreedte.*

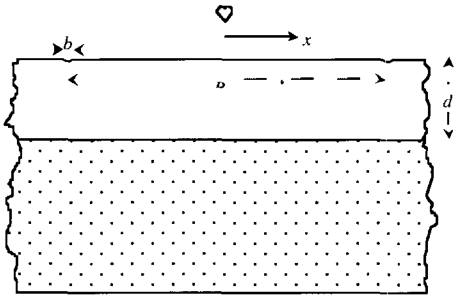
Formulering van het model

Uit ervaring met tijdreeksmodellen voor grondwaterstanden in deze geohydrologische setting blijkt dat het tijdsverloop van de grondwaterspiegel in een willekeurig punt x (zie figuur 1) in het algemeen goed gemodelleerd kan worden met een eerste-orde transfermodel zonder moving-average-termen.



Bovenaanzicht van het Hollandse Profiel onder zeer natte omstandigheden (Aerophoto-Schiphol).

Kees Maas is werkzaam bij TU Delft en Kiwa Water Research, kees.maas@kiwa.nl.



Figuur 1: Het Hollandse Profiel

Dit inspireert me tot de volgende eerste-orde differentiaalvergelijking, die de stijging of daling van de grondwaterspiegel beschrijft onder invloed van de momentane grondwaterstand, de aanvulling uit neerslag en de kwel:

$$S\frac{dh}{dt} = \frac{p-h}{c_d} + R + K \tag{1}$$

Hierin is S (-) = freatische bergingscoëfficiënt, h (m) = freatische grondwaterstand, t (d) = tijd, p (m) = polderpeil, c_d (d) = drainageweerstand, R (m/d) = grondwateraanvulling (neerslag minus verdamping), K (m/d) = kwel. Onder kwel versta ik hier het gedeelte van de slootafvoer (in m/d) dat niet toegeschreven kan worden aan de locale grondwateraanvulling.

De drainageweerstand c_d legt een verband tussen de stationaire freatische grondwaterstand en de stationaire slootafvoer (Groenendijk e.a., 2002, p 14):

$$c_d = \frac{h-p}{R+K} \tag{2}$$

Deze betrekking is te vinden door het linkerlid van (1) nul te stellen. Omdat de stationaire freatische grondwaterstand afhankelijk is van de positie x (zie figuur 1) is de drainageweerstand een functie van x. In die zin wijkt mijn definitie af van meer gangbare varianten, die gekoppeld zijn aan de perceelsgemiddelde freatische grondwaterstand of aan de grondwaterstand in het midden van het perceel. De consequentie is dat met mijn model de grondwaterstand in elk willekeurig punt x gesimuleerd kan worden.

Als er geen aanvulling R is, dan heerst er in de aquifer een stijghoogte die ik de *kweldruk* noem, aangeduid met φ_k. De kwel K hangt af van de kweldruk volgens

$$K = \frac{\varphi_k - p}{c^*} \tag{3}$$

c^* is de zogenaamde voedingsweerstand (Groenendijk e.a., 2002, p 15), dat is c-waarde die uit een pomproef zou volgen. (Bij het interpreteren van een pompproef wordt in superpositie gewerkt, wat een manier is om de aanvulling nul te stellen). Als er wél sprake is van aanvulling, dan wijkt de stijghoogte in de aquifer af van φ_k. Ik schrijf:

$$\varphi_{aq} = \varphi_k + \varphi_r \tag{4}$$

waarin φ_r het aandeel van de stijghoogte is dat door de locale grondwateraanvulling R veroorzaakt wordt. Vergelijkingen (1) en (3) geven samen:

$$S\frac{dh}{dt} = \frac{p-h}{c_d} + R + \frac{\varphi_k - p}{c^*} \tag{5}$$

Verderop in dit artikel – namelijk ik de appendix – leid ik uitdrukkingen af die beschrijven hoe c_d en c^* van de sloot- en perceelsbreedte afhangen. Om uw geduld niet op de proef te stellen vermeld ik alvast het resultaat:

$$c_d = \frac{B}{\pi\sqrt{k_h k_v}} \ln \frac{\cos\frac{\pi x}{B}}{\sin\frac{\pi b}{2B}} \qquad (|x| < \frac{B-b}{2}) \tag{6}$$

$$c^* = c - \frac{B}{\pi\sqrt{k_h k_v}} \ln(2\sin\frac{\pi b}{2B}) \tag{7}$$

c_d	=	drainageweerstrand	[d]
c^*	=	voedingsweerstand	[d]
c	=	hydraulische weerstand van de afdekkende laag ($dikte / k_v$)	[d]
B	=	perceelsbreedte	[m]
b	=	slootbreedte	[m]
k_h, k_v	=	horizontale resp. verticale doorlatendheid van de afdekkende laag	[m/d]

Vergelijking (7) kan ook geschreven worden als

$$c^* = c + c_d(x = B/3) \tag{7'}$$

Tijdsafhankelijk verloop van de grondwaterspiegel

Vergelijking (5) heeft diverse toepassingen. Een voor de handliggende is het simuleren van tijdreeksen van de grondwaterstand in een willekeurig punt in een perceel, onder invloed van variaties in aanvulling, polderpeil en kweldruk. Daartoe herformuleer ik (5) in de vorm:

$$\frac{h}{c_d} = -S\frac{dh}{dt} + R + \frac{\varphi_k - p}{c^*} + \frac{p}{c_d} \tag{8}$$

De laatste drie termen zijn fluxtermen, die ik samen kan nemen in één aanvullingsterm *A(t) (m / d)*:

$$\frac{h}{c_d} = -S\frac{dh}{dt} + A(t) \tag{9}$$

met

$$A(t) = R + \frac{\varphi_k - p}{c^*} + \frac{p}{c_d} \tag{10}$$

Om de reactie van de grondwaterstand h op een willekeurig verloop van de aanvullingsreeks *A(t)* te berekenen bepaal ik eerst de reactie op een plotselinge aanvulling met een eenheidswaterschijf. Die reactie is per definitie de impulsrespons van de grondwaterspiegel – in de tijdreeksanalyse transferfunctie genaamd – die ik aanduid met $\bar{h}$. De plotselinge aanvulling kan wiskundig beschreven worden met de deltafunctie van Dirac:

$$\frac{\bar{h}}{c_d} = -S\frac{d\bar{h}}{dt} + \delta(t) \tag{11}$$

De oplossing van (11) is

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{1}{S}\exp\left(-\frac{t}{c_d S}\right) \qquad (t \geq 0) \\ \bar{h} &= 0 \qquad (t < 0) \end{aligned} \tag{12}$$

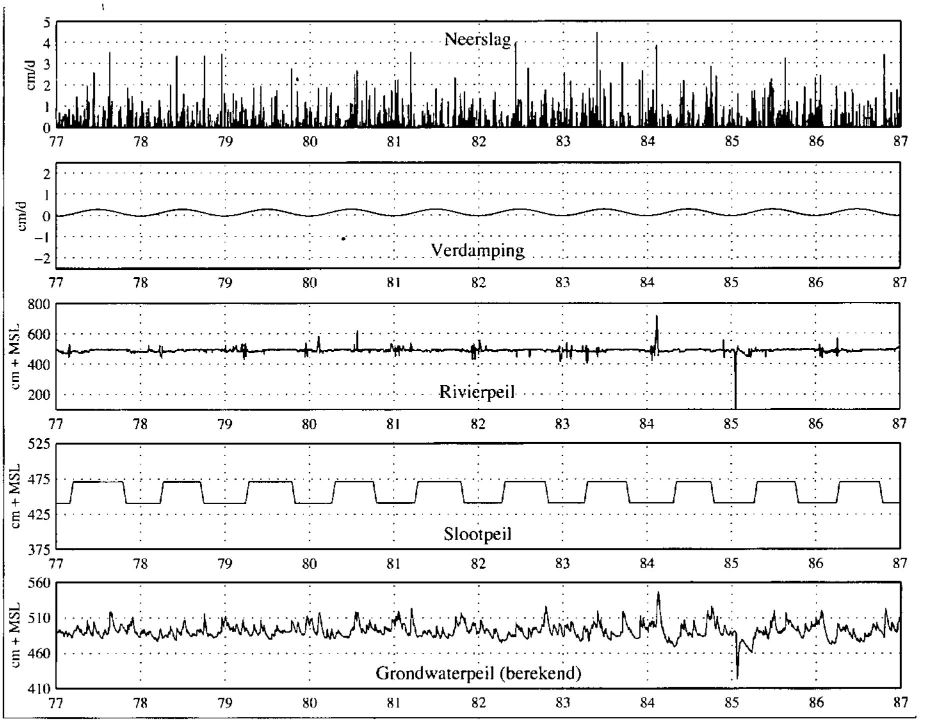
(Doordat de drainageweerstand c_d een functie is van x, is $\bar{h}$ een functie van x én t). Volgens een bekend principe uit de wiskunde – het principe van Duhamel – is de respons van de grondwaterspiegel op een willekeurige aanvullingsreeks *A(t)* ($t \geq 0$) nu te vinden door de impulsrespons $\bar{h}$ te convolueren met $A(t)$:

$$h(x,t) = A(t) \otimes \bar{h}(x,t) + h(x,0)S\bar{h}(x,t) \tag{13}$$

Hierin staat het teken $\otimes$ voor convolutie. *h(x,0)* is de grondwaterstand in punt x op $t = 0$. De tweede term in het rechterlid zorgt ervoor dat de grondwaterstand niet op nul begint, maar op *h(x,0)*. Laat u door het woord convolutie niet afschrikken; convolutie is niets anders dan een bepaalde manier om functies (c.q. reeksen) met elkaar te vermenigvuldigen. Als u in Matlab een vector *A* aanmaakt die de aanvulling $A(t)$ op dagbasis bevat, en een vector *hstreep* die de functie $\bar{h}(x,t)$op dagbasis beschrijft, dan vindt u het convolutieproduct door het commando *conv(A,hstreep)* in te typen.

Voorbeeld van een toepassing

Figuur 2 geeft een voorbeeld van een toepassing. Het gaat om de simulatie van het verloop van de grondwaterstand op een punt waar nooit gemeten is, op een afstand *a (m)* van de Maas, enkele kilometers stroomopwaarts van een stuw. De locatie is onderwerp van een rechtszaak tussen een voormalige varkensfokker en de eigenaar van een naburige vuilstortplaats. Het Maaspeil werkt door in de kweldruk φ_k volgens de formule van Mazure:



Figuur 2: Voorbeeld van een toepassing (zie de tekst voor een toelichting).

$$\varphi_k - p = (h_r - p)\exp(-a\sqrt{kDc^*}) \tag{14}$$

waarin h_r het rivierpeil is. De polder kent een onderscheid tussen zomer- en winterpeil, zodat p een functie is van t. Neerslag en verdamping werden voor deze toepassing vrij ter beschikking gesteld door het KNMI – waarvoor bij deze mijn dank. Van het gebied bestonden indicaties van de waarden van kD en c^* en van de dikte van de slecht doorlatende laag. De waarden van B en b konden van de topkaart en in het veld opgemeten worden. Alleen voor de anisotropie (de verhouding $k_h : k_v$) heb ik een aanname moeten doen, waarna ik c_d kon berekenen uit (6) en (7).

Figuur 2 toont van boven naar beneden: de neerslag, de verdamping, het Maaspeil (ter beschikking gesteld door Rijkwaterstaat), het polderpeil en tenslotte het berekende verloop van de grondwaterstand, in dit geval in het midden van het perceel.

Discussie

Lineariteit

Dit model houdt geen rekening met drains of met afstroming over het maaiveld, noch met andere zaken die er in de praktijk toe leiden dat de afwatering van een systeem niet het hele jaar door op dezelfde manier functioneert. Het model is lineair, waardoor de convolutiebewerking toegepast mag worden.

Successive steady states

Bij het afleiden van de uitdrukkingen (6) en (7) ben ik uitgegaan van een stationair stromingspatroon. Het gevolg is dat de grondwaterspiegel wel op en neer gaat, maar steeds dezelfde basale vorm heeft: hij kan geschreven worden als $h(x,t) = f(x)*g(t)$. Deze benaderende aanpak wordt de methode van successive steady states genoemd.

Onderrandvoorwaarde

Het is gebruikelijk om bij het afleiden van uitdrukkingen voor weerstanden van het topsysteem aan de onderrand van de slecht doorlatende laag òf een constante stijghoogte òf een gelijkmatig verdeelde flux op te leggen (*De Lange, 1997, p21-25*). Dit zijn twee uitersten, die verschillende uitdrukkingen opleveren voor de drainageweerstand en de voedingsweerstand. In afwijking van deze aanpak heb ik me laten leiden door de wens om voor c_d en c^* gesloten uitdrukkingen te vinden. Het gevolg is dat ik mijn onderrandvoorwaarde niet geheel in de hand heb. Hij beweegt zich tussen de twee uitersten in, wat me niet onrealistisch lijkt.

Stijghoogte in de aquifer

In sommige toepassingen is het interessant om ook het verloop van de stijghoogte in de aquifer te simùleren. In de appendix toon ik aan dat die samenhangt met de grondwaterstand h en de kwelflux K volgens

$$\varphi_{aq} = h(B/3) + Kc \tag{15}$$

Relatie tussen de kwelflux en de stijghoogte in de aquifer

In regionale grondwatermodellen wordt de voedingsweerstand gebruikt om een relatie te leggen tussen de stijghoogte in de aquifer φ_{aq} en de kwelflux K. Wim de Lange (*1997*) heeft in dit tijdschrift uitgelegd dat de stijghoogte in de aquifer dan uitgedrukt moet worden ten opzichte van een gecorrigeerd polderpeil. Dit is als volgt in te zien:

Uit (3) en (4) volgt

$$K = \frac{\varphi_{aq} - (p + \varphi_r)}{c^*} \tag{16}$$

Het polderpeil moet dus vermeerderd worden met een bedrag φ_r , zijnde het deel van de stijghoogte φ_{aq} dat aan de locale grondwateraanvulling toegeschreven moet worden. (Het zou misschien logischer zijn om te zeggen dat niet het polderpeil, maar de stijghoogte φ_{aq} een correctie behoeft, maar rekenkundig komt dat op hetzelfde neer). Uit de afleidingen in de appendix volgt dat $\varphi_r = R(c^* - c) = R\, c_d(B/3)$.

Nawoord

Ik bedank Wim de Lange voor zijn commentaar op een concept van dit artikel, en voor zijn hulp bij het doorvoeren van de terminologie die door de ad hoc Werkgroep Consensus Hydrologie is voorgesteld (zie Stromingen 8/2, p 5–9). De Werkgroep ziet het topsysteem als een afzonderlijke aquifer, die van de diepere aquifer gescheiden is door een slecht doorlatende laag met weerstand c_l. Omdat in het klassieke Hollandse Profiel het topsysteem in zijn geheel slecht doorlatend is, duid ik de hydraulische weerstand liever aan met c dan met c_l. Historisch lijkt me dit ook verantwoord.

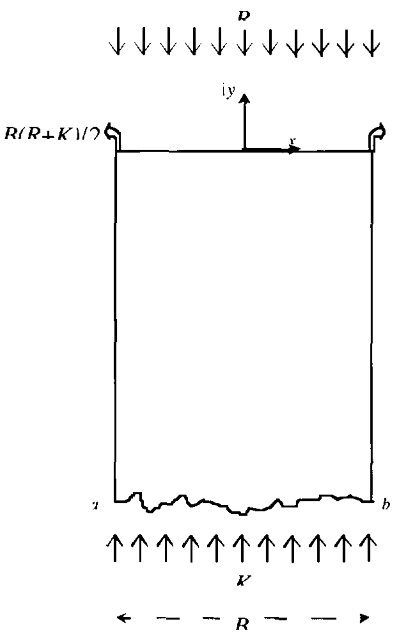
Appendix: Afleiding van uitdrukkingen voor de weerstand tegen wegzijging en de weerstand tegen kwel in het Hollandse profiel

Ik ga uit van tweedimensionale stroming in een verticaal vlak. De voornaamste weerstand tegen de stroming van grondwater treedt boven in het profiel op, nabij de sloten. Ik vind het daarom belangrijk om de stroming in het bovenste deel van de slecht doorlatende laag goed te beschrijven. Met de randvoorwaarde aan de onderkant van de slecht doorlatende laag hoef ik het minder nauw te nemen. Om te beginnen veronderstel ik dat de laag zeer dik is, en dat de kwel van grote diepte komt aanzetten. Het rekenschema wordt dan zoals afgebeeld in figuur A1.

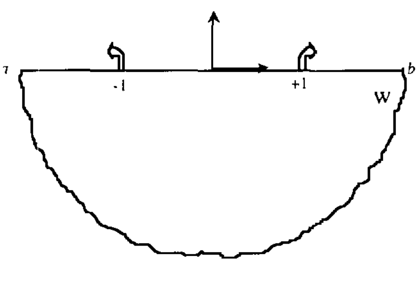
De halfoneindige strook (figuur A1) laat zich afbeelden op een onderhalfvlak volgens

$$w = \sin(\frac{\pi z}{B}) \tag{A1}$$

waarin $z = x + iy$ (zie figuur A1). Deze transformatie is te vinden in ieder boek over conforme afbeeldingen, bijvoorbeeld Verruijt (1970, p 105). Het hulpvlak w is afgebeeld in figuur A2.



Figuur A1



Figuur A2

In w is de complexe potentiaal direct op te schrijven:

$$\Omega(w) = \frac{(R+K)B}{2\pi k}\ln\{(w-1)(w+1)\} + i\frac{R}{k}\arcsin w + \arcsin A \tag{A2}$$

De eerste term beschrijft de stroming naar twee puntbronnen (de sloten) in een halfoneindig veld ter sterkte *(R+K)B/2*; de tweede term is de transformatie naar w van de gelijkmatig verdeelde aanvulling R langs de bovenrand van het x,y-domein (zie figuur A1); de derde term is een nog onbepaalde constante. k is de doorlatendheid van de slecht doorlatende laag. Terugtransformeren naar het x,y-domein levert

$$\Omega(z) = \frac{(R+K)B}{\pi k} \ln \cos \frac{\pi z}{B} + i \frac{R}{k} z + A \qquad \text{(A3)}$$

Het imaginaire deel van de constante A is op te lossen door het imaginaire deel van Ω nul te stellen in de oorsprong $z = 0$. Dit leidt tot $\Im(A) = 0$. Het reële deel van A is te vinden door te eisen dat op de randen van de sloten ($x = \pm (B-b)/2$, $y = 0$) het reële deel van Ω gelijk is aan het polderpeil p, dat ik als referentiepeil kies (p=0). Dit leidt tot

$$\Omega(z) = \frac{(R+K)B}{\pi k} \ln \frac{\cos \frac{\pi z}{B}}{\sin \frac{\pi b}{2B}} + i \frac{R}{k} z \qquad \text{(A4)}$$

De stijghoogte langs de bovenrand wordt dus gegeven door

$$\varphi(x) = \frac{(R+K)B}{\pi k} \ln \frac{\cos \frac{\pi x}{B}}{\sin \frac{\pi b}{2B}} \qquad \text{(A5)}$$

Dit is de grondwaterstand h in (1). De *drainageweerstand* is per definitie gelijk aan de verhouding tussen de grondwaterstand (gerekend ten opzichte van het polderpeil) en de flux $R + K$:

$$c_d = \frac{\varphi(x) - p}{R+K} = \frac{B}{\pi k} \ln \frac{\cos \frac{\pi x}{B}}{\sin \frac{\pi b}{2B}} \qquad \text{(A6)}$$

Dit is (6) uit de hoofdtekst, voor het geval dat $k_h = k_v = k$. Op een diepte d is de over de breedte B gemiddelde complexe potentiaal gelijk aan

$$\overline{\Omega} = \frac{1}{B} \int_{-B/2}^{B/2} \Omega(x + id)dx = -\frac{(R+K)B}{\pi k} \ln(2 \sin \frac{\pi b}{2B}) + \frac{Kd}{k} \qquad \text{(A7)}$$

(Deze uitkomst is wellicht niet triviaal. Om hem te vinden heb ik ln cos ($\pi z/B$) geschreven als

$$\ln \cos \frac{\pi z}{B} = \ln \frac{1}{2} + i \frac{\pi z}{B} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n \exp(-2ni \frac{\pi z}{B}) \qquad \text{(A8)}$$

De functies onder het sommatieteken zijn anti-symmmetrisch in x en vallen weg onder de integratie).

Het rechterlid van (A7) is een reëel getal; het is de *gemiddelde* stijghoogte op diepte $y = -d$. *Deze stel ik gelijk aan de stijghoogte* φ_{aq} *in de watervoerende laag*:

$$\varphi_{aq} = -\frac{(R+K)B}{\pi k}\ln(2\sin\frac{\pi b}{2B}) + \frac{Kd}{k} \tag{A9}$$

of

$$\varphi_{aq} = -R\frac{B}{\pi k}\ln(2\sin\frac{\pi b}{2B}) + K\{\frac{d}{k} - \frac{B}{\pi k}\ln(2\sin\frac{\pi b}{2B})\} \tag{A10}$$

De eerste term in het rechterlid geeft de bijdrage van de locale grondwateraanvulling R aan de stijghoogte in de aquifer; de tweede term geeft de bijdrage van de kwelflux:

$$\varphi_r = -R\frac{B}{\pi k}\ln(2\sin\frac{\pi b}{2B}) \tag{A11}$$

$$\varphi_k = K\{\frac{d}{k} - \frac{B}{\pi k}\ln(2\sin\frac{\pi b}{2B})\} \tag{A12}$$

De voedingsweerstand c^* volgt nu uit de definitie (zie (3), met $p = 0$):

$$c^* = \frac{\varphi_k}{K} = \frac{d}{k} - \frac{B}{\pi k}\ln(2\sin\frac{\pi b}{2B}) \tag{A13}$$

Dit is (7) uit de hoofdtekst. Voor sommige toepassingen is het handig om de stijghoogte in de aquifer uit drukken als functie van de grondwaterstand en de kwelflux. Uit (A5) en (A9) volgt:

$$\varphi_{aq} = -\varphi(x)\frac{\ln(2\sin\frac{\pi b}{B})}{\ln\frac{\cos\frac{\pi x}{B}}{\sin\frac{\pi B}{2B}}} + \frac{Kd}{k} \tag{A14}$$

Voor het speciale geval dat $x = B/3$ vereenvoudigt dit tot

$$\varphi_{aq} = \varphi(B/3) + Kc \tag{A15}$$

Dit is (15) uit de hoofdtekst.

Als de slecht doorlatende laag anisotroop is, dan moet in alle bovenstaande resultaten k vervangen worden door $\sqrt{k_h k_v}$, terwijl de verticale maten vermenigvuldigd moeten worden met $\sqrt{k_h / k_v}$; zie bijvoorbeeld Bakker (1999).

Literatuur

Ad hoc Werkgroep Consensus Hydrologie (2002) De parametrisatie van de interactie tussen grondwater en oppervlaktewater voor landelijke en regionale modelvorming, in: *Stromingen*, jrg 8, nr 2, pag 5–9.

Bakker, Mark (1999) Reactie op vuistregels 30 en 33; in: *Stromingen*, jrg 5, nr **1**, pag 77–78.

Groenendijk, P., W.J. de Lange en K. Kovar (2002) Modelconcepten voor de interactie tussen verzadigd grondwater en oppervlaktewater, *Stromingen*, jrg 8, nr 2, pag 11–28.

Lange, Wim de (1997) Nieuwe inzichten in het gebruik van de voedingsweerstand of de drainageweerstand in de randvoorwaarde van een grondwatermodel. Deel 1: De basis voor het modelconcept; in: *Stromingen*, jrg 3, nr 2, pag 17–29.

Verruijt, A. (1970) Theory of Groundwater Flow; MacMillan, 190 pag.