

---

# Grondwateruitstroming in een meer

## Een toepassing van de hodograafmethode

Mark Bakker

---

### Inleiding

Bij de AGU-conferentie in december 1999, was er een speciale sessie over de interactie tussen grondwater en oppervlaktewater. Eén van de presentaties ging over een gedetailleerd eindige-differentiemodel voor het bestuderen van de uitstroming van grondwater in een meer. De onderzoekers hadden het model gebruikt om aan te tonen dat er twee punten zijn langs het talud van het meer waar een geconcentreerde uitstroming optreedt. Het ene punt ligt op het talud ter hoogte van de waterspiegel, het andere is het hoekpunt tussen talud en vlakke bodem van het meer. Voor de geohydroloog die zijn klassieken kent is dit geen verrassing. Het is vrij eenvoudig met de hodograafmethode aan te tonen dat deze punten van geconcentreerde uitstroming optreden. De hodograafmethode werd voor het eerst toegepast op grondwaterstromingsproblemen door Hamel (1934) en Davison (1936), maar wordt nog maar zelden onderwezen. Er hangt een waas van 'te moeilijk' over de hodograafmethode, wellicht omdat vaak complexe getallen en conforme afbeeldingen gebruikt worden om een oplossing voor het stroombeeld te verkrijgen. Punten waar de stroming groot (oneindig) of klein (nul) wordt kunnen echter eenvoudig bepaald worden door de hodograaf voor het betreffende probleem te tekenen. Er komt zelfs geen wiskunde aan te pas! Het doel van dit artikel is om de basisprincipes van de hodograafmethode kort te behandelen en vervolgens de uitstroming in een meer te bestuderen.

### Basisregels voor de hodograafmethode

De hodograafmethode is specifiek bedoeld voor het het oplossen van stationaire grondwaterstromingsproblemen in verticale doorsnedes, waarbij een gedeelte van de rand bestaat uit een vrije grondwaterspiegel en/of een grensvlak tussen stromend zoet en stilstaand zout grondwater. Het kenmerkende van deze twee randen is dat hun posities niet bekend zijn voordat het stromingsprobleem opgelost is; zij worden dan ook vrije randen genoemd. Nu blijkt echter dat langs een aantal vrije randen, waaronder een vrije grondwaterspiegel en een zoet/zout-grensvlak, de relatie tussen de twee componenten van het specifieke debiet wel bekend is. Dit betekent dat een afbeelding van de rand getekend kan worden in een vlak waarin de horizontale component van de debietsvector uitgezet is langs de horizontale coördinaatsas en de verticale component langs de verticale as. Dit vlak wordt het hodograafvlak genoemd, waarbij de horizontale as is de  $q_x$ -as en de verticale as de  $q_y$ -as; de

---

**Mark Bakker** is werkzaam bij het Department of Biological and Agricultural Engineering, University of Georgia, Athens, GA, 30602, USA, e-mail: mbakker@engr.uga.edu

afbeelding van de rand in het hodograafvlak is 'de hodograaf'. Op het eerste gezicht is dit wellicht enigszins merkwaardig, maar het kan veel inzicht opleveren in de stroming op de rand, zonder dat het hele stromingsprobleem opgelost hoeft te worden (waarbij gebruik gemaakt zou moeten worden van conforme afbeeldingen e.d.).

Voor tenminste een zestal randen is bekend wat de afbeelding in het hodograafvlak is. Voor sommige randen is het eenvoudig in te zien wat de afbeelding is, maar voor andere is er een korte wiskundige afleiding nodig, waarvoor ik naar de literatuur verwijs (bijvoorbeeld Verruijt (1970), pag 119–125 en Strack (1989), pag 513–523). De volgende zes randvoorwaarden kunnen gebruikt worden:

- a Een rechte, ondoorlatende rand. De grondwaterstroming langs deze rand is altijd evenwijdig aan de rand (er is geen stroming loodrecht op de rand), zodat in het hodograafvlak de rand wordt weergegeven door een rechte lijn, evenwijdig aan de rand en door de oorsprong.
- b Een rechte equipotentiaal. De grondwaterstroming is altijd loodrecht op deze rand en wordt in het hodograafvlak wederom weergegeven door een rechte lijn door de oorsprong, maar dit keer staat de lijn loodrecht op de rand.
- c Een rechte rand met gegeven instroming  $N$  loodrecht op de rand. Langs deze rand is de stroming loodrecht op de rand bekend, maar niet evenwijdig aan de rand. Hij wordt weergegeven door een rechte lijn evenwijdig aan de rand, maar verplaatst van de oorsprong door de vector  $\vec{N}$ .
- d Een rechte kwelrand. Nu wordt het iets moeilijker. Langs een rechte kwelrand is de druk gelijk nul. De stroming evenwijdig aan de kwelrand is dus constant en kan met Darcy uitgerekend worden. De stroming loodrecht op de kwelrand is echter onbekend, zodat de afbeelding in het hodograafvlak gelijk is aan een rechte lijn, loodrecht op de kwelrand. Na het uitrekenen van de stroming evenwijdig aan de kwelrand blijkt de lijn altijd door het punt  $(q_x, q_y) = (0, -k)$  te gaan, waarbij  $k$  de doorlatendheid is.
- e Een vrije grondwaterspiegel. Het blijkt dat de afbeelding van de grondwaterspiegel een cirkel is, met als middelpunt  $(q_x, q_y) = (0, -k/2)$ , en een diameter van  $k$ . De verticale component langs de grondwaterspiegel is dus nooit naar boven gericht (gelukkig maar) en de maximale waarde van het specifiek debiet is nooit groter dan  $k$  (wat op zich al interessant is). Als de infiltratie gelijk is aan  $N$ , dan gaat de cirkel nog steeds door het punt  $(q_x, q_y) = (0, -k)$ , maar de diameter wordt  $k-N$ . De maximale voeding van een vrije grondwaterspiegel is dus gelijk aan de doorlatendheid (je kunt immers geen negatieve diameter hebben).
- f Een grensvlak tussen stromend zoet en stilstaand zout water. Dit is wederom een cirkel, dit keer boven de  $q_x$ -as, met als middelpunt  $(q_x, q_y) = (0, k^*/2)$  en een diameter van  $k^*$ , waarbij  $k^* = k(\rho_s - \rho_f) / \rho_p$  en  $\rho_s$  en  $\rho_f$  de dichtheden van zout en zoet water zijn.

Nu de afbeelding van elke rand in het hodograafvlak beschreven is, kan de hodograaf voor een probleem getekend worden (hoewel dit niet altijd eenvoudig blijkt te zijn). De rand van een stromingsgebiedje bestaat gewoonlijk uit een aantal stukken met ieder een eigen randvoorwaarde. De punten op de rand, waar de randvoorwaarde van de één in de ander overgaat, worden hoekpunten genoemd. De hoekpunten worden gewoonlijk dusdanig genummerd dat, als men zich langs de rand beweegt van punt 1 naar punt 2 naar punt 3, het stromingsgebied zich aan de linkerkant van de rand bevindt. In het hodograafvlak is dit

precies andersom: als men zich langs de rand beweegt van punt 1 naar punt 2 naar punt 3 in het hodograafvlak dan bevindt het stromingsgebied zich aan de rechterkant.

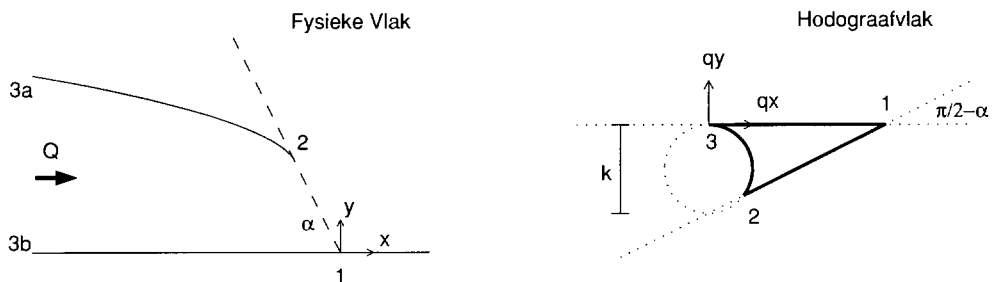
Er zijn drie belangrijke regels voor het verbinden van de randstukken in het hodograafvlak. Ten eerste, de rand moet continu zijn en kan alleen van één punt naar een ander punt springen op oneindig. Ten tweede, als de stroming oneindig wordt in een punt, dan moet dat punt op de rand liggen, tenzij er een drain in het gebied ligt waar water onttrokken of geïnjecteerd wordt (hetgeen we hier niet zullen doen). En ten derde, de rand kan zichzelf niet kruisen.

## Toepassingen

### 1 Stroming naar een kwelrand

Laten we eenvoudig beginnen. In het fysieke vlak van figuur 1 is de stroming van een bekende hoeveelheid grondwater naar een kwelrand getekend. De rand bestaat uit drie gedeelten met verschillende randvoorwaarden. Het gedeelte van punt 1 naar punt 2 is een rechte kwelrand die een hoek  $\alpha$  maakt met de basis. In het hodograafvlak liggen de punten 1 en 2 dus op een rechte lijn die loodrecht op de fysieke kwelrand staat, en door het punt  $(0, -k)$  gaat (randvoorwaarde  $d$ ). Het gedeelte van punt 2 naar punt 3a is een vrije grondwaterspiegel (zonder aanvulling). Volgens randvoorwaarde  $e$  liggen punt 2 en punt 3a dus op een cirkel met straal  $k/2$  en middelpunt  $(0, -k/2)$ . In de punten 3a en 3b, die oneindig ver weg liggen, is de stroomsnelheid 0. Immers: gaande naar links wordt de watervoerende laag steeds dikker, terwijl het totale debiet gelijk blijft. Bijgevolg wordt de stroomsnelheid steeds kleiner en komen de punten 3a en 3b in de oorsprong van het hodograafvlak terecht. (Eigenlijk zijn de punten 3a en 3b dus hetzelfde punt; in het fysieke vlak ligt dit punt op oneindig, in het hodograafvlak in de oorsprong.) Het gedeelte van punt 3b terug naar punt 1 is een horizontale, ondoorlatende basis. Punten 3b en 1 liggen dus op de horizontale coördinaatsas in het hodograafvlak (randvoorwaarde  $a$ ).

De cirkel en twee lijnen waar de hodograaf op moet liggen zijn weergegeven met stippellijnen in het hodograafvlak van figuur 1. De cirkel en twee lijnen kunnen op een aantal manieren met elkaar verbonden worden. Als men zich realiseert dat voor de stroming naar de kwelrand de horizontale component altijd naar rechts ( $q_x \geq 0$ ) is en de verticale stroming altijd naar beneden ( $q_y \leq 0$ ), dan blijft er maar één manier over (weergegeven met de vette lijn). De vette lijn wordt de hodograaf genoemd en het stromingsgebied ligt voor dit geval binnen de hodograaf (rechts van de lijn 1-2-3-1).

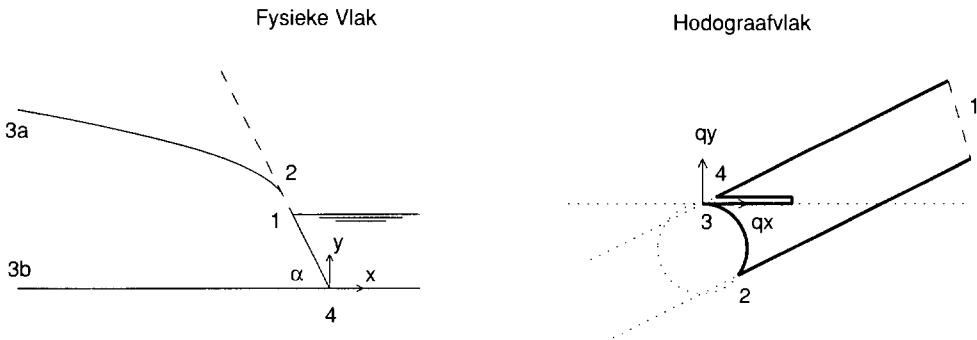


**Figuur 1:** Stroming naar een kwelrand.

Er kan meteen (nou ja, na enige meetkunde) uit de hodograaf geconcludeerd worden wat de debietsvector op de hoekpunten is. Op punt 1 bijvoorbeeld is de horizontale stroming  $q_x = k / \tan(\pi/2 - \alpha)$ . Er blijkt een geconcentreerde uitstroming te zijn op de intersectie van ondoorlatende basis en kwelrand (punt 1); de uitstroming wordt zelfs oneindig groot als de kwelrand verticaal is ( $\alpha = \pi/2$ ). Nog verrassender is dat de maximale uitstroming geen functie is van de totale hoeveelheid water die uitstroomt. Als er meer water uitstroomt wordt de kwelrand langer (hoger), maar de maximale uitstroomsnelheid blijft gelijk. Tenslotte is het interessant om te constateren dat in punt 2 de grondwaterspiegel en de kwelrand elkaar raken.

## 2 Uitstroming in een diep meer

Stel nu dat het grondwater uitstroomt in een diep meer met constant peil; de bodem van het meer valt samen met de bodem van het watervoerend pakket (figuur 2). Op het eerste gezicht kun je in het fysieke vlak de grondwaterspiegel in punt 1 laten uitkomen. Het blijkt dan echter onmogelijk te zijn om de drie gedeelten van de rand met elkaar te verbinden zonder ergens in het gebied oneindige stroming te creëren. Geconcludeerd moet worden dat er altijd een kwelrand aanwezig moet zijn om de waterspiegel in het meer met de grondwaterspiegel te 'verbinden'. De rand bestaat dan uit vier gedeelten, waarbij ten opzichte van figuur 1 alleen de rand van punt 4 naar punt 1 nieuw is (figuur 2). De rand van punt 4 naar punt 1 is een equipotentiaal en wordt weergegeven in het hodograafvlak door een rechte lijn door de oorsprong en loodrecht op de equipotentiaal in het fysieke vlak (randvoorwaarde  $b$ ).



**Figuur 2:** Uitstroming in een diep meer.

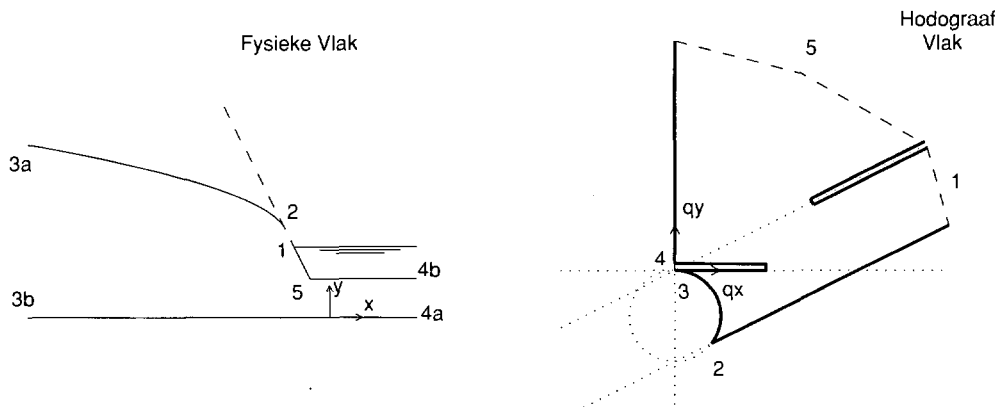
Het verbinden van de rand is nu een stuk lastiger. De horizontale component van de stroming is nog altijd naar rechts ( $q_x \geq 0$ ), maar de verticale stroming kan ook omhoog gericht zijn, bijvoorbeeld waar het grondwater in het meer stroomt. De twee lijnen die de rand van het meer (4-1) en de kwelrand (1-2) vertegenwoordigen, lopen parallel en kunnen elkaar dus alleen in het oneindige snijden. Dat betekent dat zowel punt 3 als punt 4 in de oorsprong moeten liggen, en de ondoorlatende basis wordt weergegeven door een sleuf langs de  $q_x$ -as (vette lijn, figuur 2). De sleuf kan nooit naar links lopen, want dat zou betekenen dat  $q_x$  negatief is en het water naar links zou stromen (het zou ook betekenen dat er binnen de

sleuf geen ‘gebied’ zou zijn, het gebied ligt immers rechts van de rand in het hodograafvlak).

Wederom kan bepaald worden wat de uitstroming op elk hoekpunt is. De uitstroming blijkt oneindig groot te worden op de overgang van waterspiegel naar kwelrand (punt 1). Langs de basis van het watervoerend pakket varieert de stroming van nul (op oneindig), tot een maximale waarde om weer nul te worden bij het meer (punt 4). De plaats en hoogte van de maximale waarde is onbekend, alleen kunnen we de waarde beperken tot  $q_x \leq k / \tan(\pi / 2 - \alpha)$ , want de sleuf kan de lijn 1–2 niet kruisen.

### 3 Uitstroming in een ondiep meer

Hoe nu als het meer ondiep is en bestaat uit een recht talud onder een hoek  $\alpha$  en een horizontale bodem, die boven de bodem van het watervoerend pakket ligt (figuur 3)? In dat geval bestaat de rand van het meer uit twee equipotentialen. Punt 4 ligt op oneindig (het is een oneindig breed meer) en is voor de duidelijkheid opgesplitst in 4a en 4b, en punt 5 vormt het hoekpunt tussen de horizontale bodem en het talud. De rand van 4b naar 5 is een horizontale equipotentiaal zodat de punten 4 en 5 op de verticale coördinaatsas liggen in het hodograafvlak.



**Figuur 3:** Uitstroming in een ondiep meer.

Als de lijnen met elkaar verbonden worden en de hodograaf getekend wordt (vette lijnen in figuur 3) blijken zowel de punten 1 als 5 op oneindig te liggen; de equipotentiaal langs het talud wordt een sleuf die op oneindig begint en eindigt. Dit is wat we wilden aantonen. Er is een geconcentreerde uitstroming (theoretisch oneindig groot) in zowel het hoekpunt van vlakke bodem en talud (punt 5) als op het talud ter hoogte van de waterspiegel in het meer (punt 1); tussen punt 5 en punt 1 bereikt de uitstroming een minimum.

### Andere praktijksituaties

Er kunnen nog vele andere situaties bestudeerd worden. Wat bijvoorbeeld als de kwelrand bestaat uit twee rechte gedeeltes met een verschillende helling (de kwelrand maakt dan

een knik), of als de ondoorlatende basis een knik maakt. Helemaal leuk wordt het als het meer niet oneindig breed is maar een eindige breedte heeft. Dan kunnen er stagnatiepunten optreden op de bodem van het meer als het grondwater aan de linkerkant het meer instroomt en aan de rechterkant het meer uit. Of, als er grondwater het meer instroomt van beide kanten, dan is er een stagnatiepunt op de bodem van het watervoerend pakket. Ook kunnen er drains binnen het gebied gelegd worden waar grondwater uit het watervoerend pakket onttrokken wordt. Dan kunnen er stagnatiepunten optreden die niet op de rand liggen maar ergens binnen het gebied.

### **Dankbetuiging**

De auteur is dank verschuldigd aan Rob Bakker en Kees Maas voor hun verbeteringen en suggesties.

### **Literatuur**

- Davison, B.B. (1936)** On the steady two-dimensional motion of ground-water flow with a free surface; in: *Phil. Mag.* **21**, pag 881–903.
- Hamel, G. (1934)** Ueber Grundwasser; in: *Z. Angew. Math. Mech.* **14**, pag 129–157.
- Strack, O.D.L. (1989)** *Groundwater Mechanics*; Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Verruijt, A. (1970)** *Theory of groundwater flow*; Gordon and Breach Science Publishers, New York.