

---

# Het verlagingspatroon rondom een put nabij een niet-versmeerde breuk in een gelaagde aquifer

Kees Maas

---

*Dit artikel is een uitwerking van een voordracht voor de NHV-werkgroep Analytische Methoden (het Ernstgenootschap), gehouden op 7 juni 2000. Er wordt een formule afgeleid die het verlagingspatroon beschrijft ten gevolge van een onttrekking door een put nabij een breuk in een gelaagde aquifer. De breuk is niet versmeerd en biedt geen weerstand tegen grondwaterstroming anders dan de weerstand die aan de aquifers is toe te schrijven. Er vindt ook geen voeding uit sloten plaats. De breuk scheidt het stromingsdomein in twee op zich homogene delen. In het deel zonder de put, dus aan de overkant van de breuk, blijkt de verlaging in alle aquifers dezelfde te zijn. Bijgevolg treedt daar geen lek op door de slecht-doorlatende lagen: dit gedeelte merkt schijnbaar niets van de gelaagdheid en reageert in zijn geheel als één aquifer. In het domein dat de put bevat varieert het verlagingspatroon natuurlijk wel van laag tot laag.*

## Achtergrond

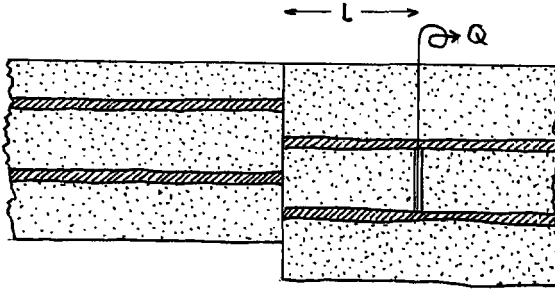
Het is de Nederlandse hydrologen wel bekend dat de diepe ondergrond van ons land talrijke breuken vertoont. Vooral in Limburg en het oostelijke deel van Noord Brabant komen ook breuken voor in watervoerende pakketten die voor de drinkwaterwinning benut worden. In het algemeen wordt verondersteld dat deze breuken versmeerd zijn en geen of weinig water doorlaten, maar nabij Tilburg is dat waarschijnlijk niet het geval. De N.V. Tilburgsche Waterleiding-Maatschappij heeft althans een puttenveld nabij de zogeheten Gilzerbaanbreuk, waarvan ook de middeldiepe putten jong, door de mens beïnvloed water aantrekken, terwijl de filters toch onder een dikke kleilaag gesteld zijn. De veronderstelling is dat het jonge water via de breuk het winningspakket bereikt. Het bedrijf speelt met de gedachte om langs de breuk een infiltratiepand aan te leggen, om de toestroming van freatisch grondwater te verhinderen. De vraag is dan hoeveel water geïnfilteerd zou moeten worden, en dat is een mooie aanleiding om het stromingspatroon naar een put nabij een niet-versmeerde breuk te analyseren. Het werk dat ik in dit artikel presenteer is in samenwerking met de TWM uitgevoerd. Mijn contactpersonen waren Dick Edelman en Maarten de Wit.

---

**Kees Maas** is werkzaam bij de TU Delft, Sectie Hydrologie en Ecologie, en bij Kiwa NV Onderzoek en Advies, kmaas@kiawoa.nl.

## Vraagstelling

Figuur 1 geeft een doorsnede te zien door een gelaagde aquifer, loodrecht op een breuk waarlangs de verschillende subaquifers in verticale zin ten opzichte van elkaar verschoven zijn. Op een afstand  $L$  van de breuk bevindt zich een winningsput.



**Figuur 1:** Doorsnede over een breuk in een gelaagde aquifer, met een winningsput op enige afstand

Hoe ziet het verlagingspatroon ten gevolge van de winning eruit, als aangenomen mag worden dat de breuk niet versmeerd is?

## Matrixfuncties als hulpgereedschap voor het oplossen van stroming in gelaagde media

Ik ben van plan om het probleem eerst in termen van matrixfuncties te formuleren en daarna de methode van spiegeling (*method of images*) toe te passen. De laatste methode is onder grondwaterhydrologen wel bekend; hij is in veel studieboeken beschreven, dus ik hoef hem in dit artikel niet uiteen te zetten. De literatuur over matrixfuncties is veel schaarser. In een eerdere aflevering van *Stromingen* is al een keer een introductie gegeven (Maas en Olsthoorn, 1997), die de geïnteresseerde lezer nog eens zou kunnen doornemen. Meer informatie over matrixfuncties is te vinden in het onlangs verschenen boek van Bruggeman (Bruggeman, 1999). Om dit artikel zelfstandig leesbaar te houden geeft ik toch een kort overzicht, maar dan zonder afleidingen of bewijzen. Tegelijkertijd leid ik een formule af voor stroming naar een put in een gelaagd systeem, die als bouwsteen dient voor de oplossing van het probleem van dit artikel. Wie deze inleiding overbodig vindt kan verder lezen vanaf formule (24).

Matrixfuncties zijn gewone wiskundige functies, zoals *exp*, *sin*, *log*. Ze werken echter niet op een enkel getal, maar op een vierkante matrix. Een betrekkelijk eenvoudig voorbeeld van zo'n functie is de wortel van een vierkante matrix **A**. Stel dat

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{A} \quad (1)$$

dan is

$$\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{B}} \quad (2)$$

De eerste bewerking, de vermenigvuldiging van een vierkante matrix met zichzelf, is goed gedefinieerd. De tweede bewerking is het omgekeerde van de eerste. Het is gevoelsmatig wel duidelijk dat zo'n bewerking mogelijk moet zijn, dus dat de wortel van een matrix een bestaanbare functie is. Hoe je de wortel van een matrix in de praktijk uitrekent laat ik nog even in het midden. Eerst geef ik een ander voorbeeld van een matrixfunctie, die in sommige takken van techniek veel toepassing vindt: de zogenaamde *matrix exponential*

$$f(\mathbf{A}) = \exp(\mathbf{A}) \tag{3}$$

Eén manier om  $\exp(\mathbf{A})$  uit te rekenen loopt via de reeksontwikkeling van Taylor:

$$\exp(\mathbf{A}) = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \dots \tag{4}$$

Hierin is  $\mathbf{I}$  een eenheidsmatrix, dat is een diagonaalmatrix die op de (hoofd)diagonaal uitsluitend enen bevat.  $\mathbf{I}$  heeft dezelfde maat als  $\mathbf{A}$ . Wie in staat is om een vierkante matrix met zichzelf te vermenigvuldigen kan uitdrukking (4) direct evalueren.

Iedere wiskundige functie heeft een matrixvariant. Niet iedere functie heeft een Taylorreeks (de wortel is daarvan een voorbeeld), maar wiskundigen hebben methoden gevonden om elke matrixfunctie uit te rekenen. We hoeven daar nu niet bij stil te staan, want matrixfuncties zijn tegenwoordig standaard beschikbaar in wiskundige software. In MATLAB kan een aantal elementaire wiskundige functies direct als matrixfunctie aangeroepen worden. Ze hebben dezelfde naam als de 'scalaire' functies waarvan ze afstammen, met een extra letter  $m$ : *expm*, *sinm*, *logm*, etc. Minder courante matrixfuncties (maar ook de matrixfuncties die al kant en klaar beschikbaar zijn) kunt u zelf bouwen met het commando *funm(A,functienaam)*. Zo levert *funm(A,'exp')* hetzelfde resultaat op als *expm*.

Matrixfuncties hebben veel eigenschappen gemeen met hun scalaire familieleden. Als bijvoorbeeld  $\mathbf{A}$  een vierkante matrix is, en  $r$  is een getal, dan is

$$\frac{df(r\mathbf{A})}{dr} = \mathbf{A}f'@r\mathbf{A} \tag{5}$$

Dit is natuurlijk gewoon de kettingregel. Dus als  $f$  de gemodificeerde Besselfunctie van de tweede soort, orde nul is (bekend uit de formule van De Glee) dan is

$$\frac{dK_0(r\sqrt{\mathbf{A}})}{dr} = -\sqrt{\mathbf{A}}K_1(r\sqrt{\mathbf{A}}) \tag{6}$$

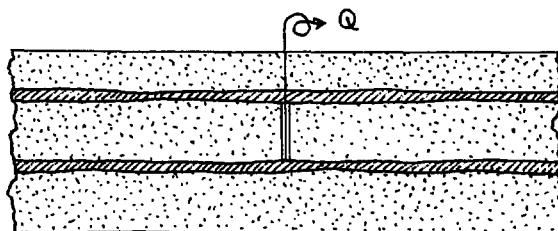
Dat is precies wat je zou verwachten. Het limietgedrag van matrixfuncties lijkt ook erg op wat we gewend zijn. Om enkele voorbeelden te geven, die straks van pas komen:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K_0(r\sqrt{\mathbf{A}}) = \mathbf{0I} \tag{7}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} I_0(r\sqrt{\mathbf{A}}) = \infty\mathbf{I} \tag{8}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} K_1(r\sqrt{A}) - \frac{1}{r\sqrt{A}} = 0 \quad (9)$$

Laten we eens proberen om dit kleine beetje kennis toe te passen op het probleem van stroming naar een put in een gelaagd systeem (figuur 2).



De differentiaalvergelijking voor de  $i^{\circ}$  subaquifer luidt

$$\nabla^2 h_i + \frac{h_{i-1} - h_i}{T_i c_i} + \frac{h_{i+1} - h_i}{T_i c_{i+1}} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

waarin

$h_i$	=	grondwaterstijghoogte	[L]
$T_i$	=	transmissiviteit van de $i^{\circ}$ subaquifer	[L <sup>2</sup> /T]
$c_i$	=	weerstand van de $i^{\circ}$ subaquitard	[T]
$n$	=	aantal subaquifers	

Laten we bovendien veronderstellen dat

$$\begin{aligned} h_0 &= 0 \\ c_{n+1} &= \infty \end{aligned} \quad (11)$$

De bijbehorende randvoorwaarden zijn

$$\lim_{r \rightarrow 0} 2\pi r \frac{dh_i}{dr} = \frac{Q_i}{T_i} \quad (12)$$

$$h_i(\infty) = 0 \quad (13)$$

waarin

$Q_i$	=	hoeveelheid water die per tijdseenheid door de put aan de $i^{\circ}$ aquifer onttrokken wordt [L <sup>3</sup> /T]
-------	---	--

(Tot zover is dit allemaal nog standaard-collegestof). Nu matrixfuncties softwarematig beschikbaar zijn is het verreweg het handigst om het probleem te herformuleren in matrix-notatie. Het matrix-equivalent van (10) luidt

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \mathbf{A}\mathbf{h} = 0 \quad (14)$$

en de randvoorwaarden (12) en (13) gaan over in

$$\lim_{r \rightarrow 0} 2\pi r \frac{d\mathbf{h}}{dr} = \mathbf{Q} / \mathbf{T} \quad (15)$$

$$\mathbf{h}(\infty) = 0 \quad (16)$$

Hier zijn  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{Q}$  en  $\mathbf{T}$   $n$ -vectoren, die respectievelijk de stijghoogten, de debieten en de transmissiviteiten van de verschillende subaquifers bevatten. De handige notatie  $\mathbf{Q}/\mathbf{T}$  heb ik aan MATLAB ontleend. Dit quotiënt stelt een  $n$ -vector voor, waarvan de elementen gelijk zijn aan  $Q_i/T_i$ .  $\mathbf{A}$  is een vierkante tri-diagonaalmatrix. Voor het geval van drie subaquifers ziet hij er als volgt uit:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1 c_1} + \frac{1}{T_1 c_2} & -\frac{1}{T_1 c_2} & 0 \\ -\frac{1}{T_2 c_2} & \frac{1}{T_2 c_2} + \frac{1}{T_2 c_3} & -\frac{1}{T_2 c_3} \\ 0 & -\frac{1}{T_3 c_3} & \frac{1}{T_3 c_3} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Deze matrix komt vanzelf tevoorschijn bij het omschrijven van (10) in (14). Ik vertrouw erop dat de lezer gemakkelijk kan achterhalen hoe  $\mathbf{A}$  eruit zou zien als er meer of minder dan drie subaquifers in het spel zijn. Ik noem  $\mathbf{A}$  de *systeemmatrix*, omdat hij het systeem geohydrologisch karakteriseert.

Merk op dat het stelsel (14) t/m (16) wiskundig gesproken identiek is aan (10) t/m (13); het enige verschil is de notatie. De matrixnotatie biedt echter een onvergelijkbaar voordeel bij het oplossen van problemen waarin gelaagde aquifers een rol spelen.

In termen van matrixfuncties luidt de algemene oplossing van (14)

$$\mathbf{h} = K_0(r\sqrt{\mathbf{A}})\mathbf{c}_1 + I_0(r\sqrt{\mathbf{A}})\mathbf{c}_2 \quad (18)$$

Hierin zijn  $\mathbf{c}_1$  en  $\mathbf{c}_2$  onbekende  $n$ -vectoren, die uit de randvoorwaarden opgelost moeten worden. Formeel (dwz: qua formulering) is dit hetzelfde als het scalaire geval (het geval met één laag). Het enige waarop u moet letten is dat u de matrices en de vectoren in de goede volgorde zet, overeenkomstig de afspraken die wiskundigen daarover gemaakt hebben.

Wegens (16) en (8) is

$$\mathbf{c}_2 = 0 \quad (19)$$

zodat

$$\mathbf{h} = K_0(r\sqrt{\mathbf{A}})\mathbf{c}_1 \quad (20)$$

Met behulp van (6) volgt nu uit (15) en (20) dat

$$-\lim_{r \rightarrow 0} 2\pi r \sqrt{\mathbf{A}} K_1(r\sqrt{\mathbf{A}}) \mathbf{c}_1 = \mathbf{Q} / \mathbf{T} \quad (21)$$

Als ik tenslotte gebruik maakt van (9), dan vind ik

$$\mathbf{c}_1 = -\frac{1}{2\pi} \mathbf{Q} / \mathbf{T} \quad (22)$$

zodat

$$\mathbf{h} = -\frac{1}{2\pi} K_0(r\sqrt{\mathbf{A}}) (\mathbf{Q} / \mathbf{T}) \quad (23)$$

Het minteken geeft aan dat de stijghoogte in de verschillende subaquifers lager is dan de stijghoogte  $h_0$  langs de bovenrand van het systeem. Althans als  $\mathbf{Q}$  positief is, dus als er water gewonnen wordt. Als we overeenkomen dat verlagingen positief gerekend worden, zoals voor putformules gebruikelijk is, dan is het eindresultaat

$$\mathbf{h} = \frac{1}{2\pi} K_0(r\sqrt{\mathbf{A}}) (\mathbf{Q} / \mathbf{T}) \quad (24)$$

Deze formule, die in deze vorm eerder door Maas en Olsthoorn (1997) gepresenteerd werd, is een elementaire bouwsteen voor de oplossing van het probleem van dit artikel. De appendix bij dit artikel bevat drie zogenaamde *M-files* (door de gebruiker gedefinieerde MATLAB-functies), waarmee deze formule vanaf het MATLAB-commandoscherf geëvalueerd kan worden. De eerste M-file stelt de systeemmatrix  $\mathbf{A}$  samen, als  $\mathbf{T}$  en  $\mathbf{c}$  gegeven zijn. De tweede berekent de matrixbesselfunctie  $K_0$ . De derde is een hulp-file voor de tweede. Deze drie M-files kwamen ook al voor in het artikel van Maas en Olsthoorn. Hier is een getallenvoorbeeld:

```

» T = [1000; 2000; 3000]; c = [500; 1000; 2000];
» A = sysmat(T,c);
» Q = [0; 2400; 0];
» h = 1/(2*pi)*K0(100*sqrtm(A))*(Q./T)
h =
    0.0670
    0.5232
    0.0556

```

Dit zijn de verlagingen in een systeem van drie aquifers, op 100 meter van de put. Neemt u even de tijd om tot u te laten doordringen hoe extreem eenvoudig dit werkt, in MATLAB. Deze som kost u minder dan een minuut! Als u de eerste drie M-files uit de appendix overneemt op uw laptop, dan kunt u voortaan staande een vergadering alternatieven berekenen voor winningen, bemalingen, etc.

## Probleemstelling

Ik ga nu over tot de oplossing van het eigenlijke probleem van dit artikel, dat schematisch is weergegeven in figuur 1. De figuur stelt een put voor in een gelaagd systeem, op een afstand  $L$  van een niet-versmeerde breuk. De vraag is hoe het verlagingsspatroon ten gevolge van de winning eruit ziet. Ik ben van plan om de methode van spiegeling toe te passen. Omdat dit in wezen een fysische methode is, hoef ik de probleemstelling niet verder wiskundig uit te werken, maar kan ik direct overgaan tot het bespreken van de oplossingsprocedure.

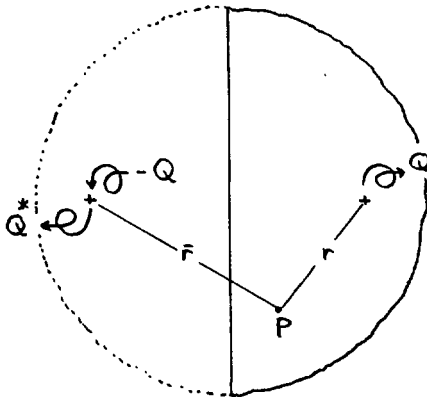
## Oplossing

NB: de volgende oplossingsmethode is beperkt tot gevallen waarin er geen voeding uit sloten plaatsvindt. Dit houdt in dat  $c_1 = \infty$ , zodat het eerste element  $A_{1,1}$  van de systeemmatrix overgaat in  $1/(T_1 c_2)$  (zie (17)).

Om de zaak overzichtelijk te houden neem ik aan dat er geen achtergrondstroming aanwezig is. Als de put er niet is, is de stijghoogte overal gelijk; laten we zeggen: nul. Mijn tactiek is om het stromingsgebied op te splitsen in twee aparte domeinen: het gedeelte links van de breuk zónder put en het gedeelte rechts van de breuk mét put. Ik zoek in beide domeinen naar een oplossing, en zorg ervoor dat ze op de plaats van de breuk met elkaar in overeenstemming zijn.

*De eigenaardigheid van een niet-versmeerde breuk is dat langs de breuk alle aquifers dezelfde stijghoogte vertonen.*

Ter plaatse van de breuk moeten de twee oplossingen aan deze eis voldoen. Een tweede eis is dat er continuïteit van stroming moet zijn. De continuïteitseis geldt integraal; niet per aquifer (ter plaatse van de breuk vindt er immers uitwisseling van water plaats tussen de verschillende aquifers).



**Figuur 3:** Het rechter stromingsdomein met de put

Figuur 3 toont het rechter stromingsdomein met de put. Ik heb het domein denkbeeldig naar links uitgebreid, zoals aangegeven met de stippellijn. Aan deze uitbreiding geef ik dezelfde geohydrologische opbouw als het rechter domein, zodat ik rekenkundig te doen heb met een oneindig uitgestrekt gebied dat in horizontale zin homogeen is. Stel dat de hydrologische parameters gegeven worden door  $\mathbf{T}_1$  en  $\mathbf{c}_1$ , de systeemmatrix door  $\mathbf{A}_1$  en de debietvector door  $\mathbf{Q}$ . Dan geeft (24) de elementaire oplossing van het verlagingsprobleem:

$$\mathbf{h}_1 = \frac{1}{2\pi} K_0(r\sqrt{\mathbf{A}_1})(\mathbf{Q} / \mathbf{T}_1) \quad (25)$$

waarin  $r$  de afstand is van een willekeurig waarnemingspunt  $P$  tot de put. Ik plaats nu een tweede put, met hetzelfde (maar tegengesteld) debiet in het spiegelpunt van  $P$ , gerekend ten opzichte van de breuk.

Daardoor verandert het verlagingspatroon in

$$\mathbf{h}_1 = \frac{1}{2\pi} [K_0(r\sqrt{\mathbf{A}_1}) - K_0(\bar{r}\sqrt{\mathbf{A}_1})](\mathbf{Q} / \mathbf{T}_1) \quad (26)$$

waarin  $\bar{r}$  de afstand is van  $P$  tot de spiegelput. Langs de breuk is  $r = \bar{r}$ . Volgens (26) treedt langs de breuk geen verlaging op. Dit is natuurlijk nog niet het resultaat dat ik zoek, maar (26) heeft alvast de gewenste eigenschap dat langs de breuk alle aquifers dezelfde stijghoogte vertonen. Het is echter onwaarschijnlijk dat hiermee ook al voldaan kan worden aan de eis dat de integrale flux over de breuk continu moet zijn, als we straks de twee domeinen aan elkaar knopen. Laten we een tweede put invoeren met debiet  $\mathbf{Q}^*$ , op dezelfde plaats als de spiegelput (zie figuur 3). Als ik de debieten over de verschillende aquifers verdeel naar rato van de  $T$ -waarden, dus

$$\mathbf{Q}^* = \alpha \mathbf{T}_1 \quad (27)$$

dan wekt deze put in elke laag precies dezelfde verlagingskegel op. (Vooralsnog is  $\alpha$  een onbekende constante). Als alle aquifers precies dezelfde verlaging hebben, dan treedt er tussen de aquifers onderling geen lek op. Voor deze put is het dus alsof de aquitards er helmaal niet zijn, zodat we te maken hebben met (een meerlagenvariant op) de formule van Thiem voor de verlaging ten gevolge van een put in een afgesloten aquifer:

$$\mathbf{h}^* = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{\bar{r}}{R} (\mathbf{Q}^* / \mathbf{T}_1) \quad (28)$$

Hierin is  $R$  de onbepaalde constante die in de formule van Thiem voorkomt. Op grond van (27) is (28) alternatief te schrijven als

$$\mathbf{h}^* = -\frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{\bar{r}}{R} \mathbf{i} \quad (29)$$

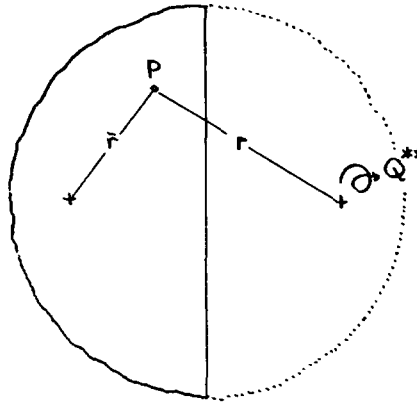
waarin  $\mathbf{i}$  een  $n$ -vector is die uitsluitend enen bevat. Superpositie van dit resultaat op (26) levert

$$\mathbf{h}_1 = \frac{1}{2\pi} [K_0(r\sqrt{\mathbf{A}_1}) - K_0(\bar{r}\sqrt{\mathbf{A}_1})](\mathbf{Q} / \mathbf{T}_1) - \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{\bar{r}}{R} \mathbf{i} \quad (30)$$



Omdat (29) in alle aquifers precies dezelfde verlaging opwekt, terwijl (26) langs de breuk helemaal geen verlaging opwekte, heeft (30) nog steeds de gewenste eigenschap dat langs de breuk alle aquifers dezelfde stijghoogte te zien geven.

Ik laat het rechter gedeelte, domein 1, nu even rusten en ga naar domein 2, links van de breuk (figuur 4). Dit domein heeft transmissiviteitsvector  $\mathbf{T}_2$ , die mag afwijken van  $\mathbf{T}_1$ . Zelfs de lengte van deze vector, dus het aantal subaquifers, mag anders zijn dan in domein 1. Ik breid domein 2 denkbeeldig uit naar rechts.



Figuur 4: Linker domein

Mijn doel is natuurlijk om een oplossing te vinden die langs de breuk overeenstemt met (30). Daartoe plaats ik een put met debiet  $Q^{**}$  op de plek waar in domein 2 de oorspronkelijke, fysiek aanwezige put staat, en ik zorg er weer voor dat de onttrekking naar evenredigheid van de transmissiviteiten over de verschillende aquifers verdeeld is:

$$Q^{**} = \alpha T_2 \tag{31}$$

De verlaging ten gevolge van deze put is

$$h_2 = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{R} \left( \frac{Q^{**}}{T_2} \right) = -\frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{r}{R} \mathbf{i} \tag{32}$$

Het is eenvoudig in te zien dat op de breuk  $h_1 = h_2$  (vergelijk (30) met (32) voor  $r = \bar{r}$ ), dus als ik straks de twee domeinen langs de breuk aan elkaar pas, is continuïteit van stijghoogte gegarandeerd.

De enige voorwaarde die nu nog vervuld moet worden is continuïteit van stroming over de breuk. De totale stroming die over de breuk het rechter domein binnenkomt is gelijk aan  $sum(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^*/2)$ ; zie figuur 3. (De functie *sum* heb ik overgenomen van MATLAB; hij sommeert de elementen van een vector). Te gelijker tijd is de totale stroming die het linker domein over de breuk verlaat gelijk aan  $sum(\mathbf{Q}^{**}/2)$ ; zie figuur 4. Ik moet dus eisen dat

$$\text{sum}(\mathbf{Q} - \frac{1}{2}\mathbf{Q}^*) = \text{sum}(\frac{1}{2}\mathbf{Q}^{**}) \quad (33)$$

of, wegens (27) en (31):

$$\text{sum}(\mathbf{Q} - \frac{\alpha}{2}\mathbf{T}_1) = \text{sum}(\frac{\alpha}{2}\mathbf{T}_2) \quad (34)$$

zodat

$$\alpha = \frac{2\text{sum}\mathbf{Q}}{\text{sum}\mathbf{T}_1 + \text{sum}\mathbf{T}_2} \quad (35)$$

Het verlagingspatroon ligt nu geheel vast. Invullen van (35) in (30) geeft

$$\mathbf{h}_1 = \frac{1}{2\pi} [K_0(r\sqrt{\mathbf{A}_1}) - K_0(\bar{r}\sqrt{\mathbf{A}_1})](\mathbf{Q} / \mathbf{T}_1) - \frac{\text{sum}\mathbf{Q}}{\pi(\text{sum}\mathbf{T}_1 + \text{sum}\mathbf{T}_2)} \ln \frac{\bar{r}}{R} \mathbf{i} \quad (36)$$

voor het rechter domein dat de put bevat, en invullen in (32) geeft

$$\mathbf{h}_2 = - \frac{\text{sum}\mathbf{Q}}{\pi(\text{sum}\mathbf{T}_1 + \text{sum}\mathbf{T}_2)} \ln \frac{r}{R} \mathbf{i} \quad (37)$$

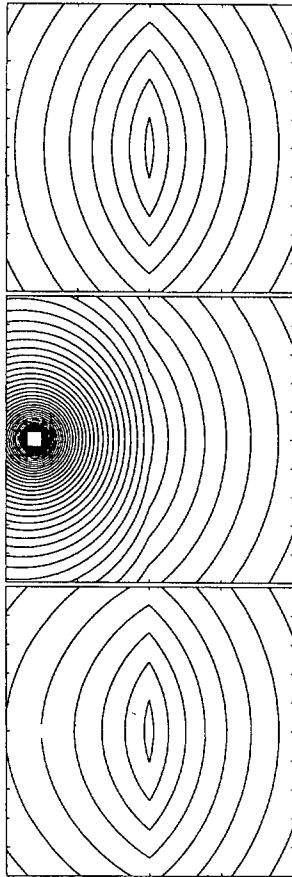
voor het linker domein. Samenvattend:

$\mathbf{h}_{1,2}$	=	vector die de verlagingen in de verschillende subaquifers bevat	[L]
$\mathbf{A}$	=	systeemmatrix, zoals gedefinieerd door (17)	[1/L <sup>2</sup> ]
$\mathbf{T}_{1,2}$	=	vector die de transmissiviteiten van de verschillende subaquifers bevat	[L]
$\mathbf{Q}$	=	vector die de debieten bevat die aan de verschillende subaquifers worden onttrokken	[L <sup>3</sup> /T]
$\mathbf{i}$	=	eenheidsvector met dezelfde maat als $\mathbf{Q}$	[-]
$r$	=	afstand van een waarnemingspunt tot de put	[L]
$\bar{r}$	=	afstand van een waarnemingspunt tot de spiegelput	[L]

$R$  is een constante die onbepaald blijft, net als in de formule van Thiem. (Het komt erop neer dat de verlaging alleen eenduidig uitgerekend kan worden als er ergens in het gebied een peilbuis staat waar de verlaging bekend is.  $R$  moet zo gekozen worden dat de verlaging in die peilbuis klopt.)

## MATLAB-programma

De appendix bevat een M-file *fault*, die de verlaging berekent tengevolge van een put nabij een niet-versmeerde breuk in een gelaagd systeem. Deze M-file maakt gebruik van de drie M-files die eraan voorafgaan. Als u even in de file kijkt, dan ziet u dat hij niet veel meer om het lijf heeft dan de formules (36) en (37). Hier is een numeriek voorbeeld:



**Figuur 5:** Het verlagingsspatroon rondom een put nabij een niet-versmeerde breuk in een gelaagde aquifer. Er zijn drie subaquifers; de onttrekking vindt plaats uit de middelste. De plaatjes tonen van boven naar beneden de isoverlagingslijnen in de drie subaquifers.

```

» T1 = [1000 1000]; T2 = [500 1500]; c1 = [1000000 500]; c2 = [1000000 700]; Q
= [0 1200];
» r1 = 100; r2 = 1000; R = 3000;
» h = fault(T1,T2,c1,c2,Q,r1,r2,R)
h =
  0.1682
  0.4812

```

### Een uitgewerkt voorbeeld

Figuur 5 geeft een wat uitgebreider voorbeeld. In dit geval zijn er aan weerszijden van de breuk drie subaquifers. De plaatjes stellen de isohypsen voor. Merk op dat in alle drie de

subaquifers de isohypsen in het linker domein steeds precies dezelfde zijn. De put staat in de middelste aquifer. De weerstand tussen de bovenste en de middelste aquifer is zo hoog gekozen, dat de uitwisseling van grondwater vrijwel uitsluitend via de breuk plaatsvindt. De weerstand tussen de middelste en de diepste aquifer is lager; hier treedt duidelijk lek door de weerstandslaag op.

### Nawoord (1)

De vraag waarmee dit artikel begon, namelijk hoeveel water er langs een niet-versmeerde breuk geïnfilteerd moet worden om te voorkomen dat er freatisch water naar de diepere putten toestroomt, is bij nader inzien zonder rekenwerk te beantwoorden: precies evenveel als er onttrokken wordt. Immers, om toestroming van freatisch water in de richting van de breuk te verhinderen moet de gradiënt in de freatische aquifer nul zijn. De infiltratie-inrichting moet er dus voor zorgen dat er langs de breuk geen verlaging in het freatische pakket optreedt. Als de breuk niet versmeerd is, houdt dit in dat er in geen enkele subaquifer langs de breuk verlaging optreedt. De breuk functioneert dus al volledig voedende grens, en dat kan alleen als hij precies evenveel water levert als er door de put onttrokken wordt.

### Nawoord (2)

Het idee om in dit geval de *method of images* toe te passen komt uit Hunt en Curtis (1989). Zij lossen met een meer omslachtige methode een eenvoudiger maar aanverwant probleem op.

### Literatuur

- Bruggeman, G.A. (1999)** Analytical Solutions of Geohydrological Problems; Elsevier, 959 pag.
- Maas, Kees en Theo Olsthoorn (1997)** Snelle oudjes gaan MATLAB; in: *Stromingen*, jrg 3, nr 4, pag 21–42.
- Hunt, B. en T. Gray Curtis (1989)** Flow to a Well Near the Boundary Between a Layered and an Unlayered Aquifer System; in: *Water Resources Research*, vol 25, nr 3, pag 559–563.

### Appendix

```
function A = sysmat(T,c)
% sysmat(T,c) constructs the system's matrix of multiple aquifer flow,
% eq (17) .
T = T(:); c = c(:); n = length(T);
a = 1./(T.*c);
b = 1./(T.*[c(2:n);inf]);
A = diag(a+b)-diag(a(2:n),-1)-diag(b(1:n-1),1);
```

```

function f = K0(A)
% K0(A) returns the matrix Bessel function K0 of A
f = funm(A,'besselk0');

function f = besselk0(x)
% besselk0(x) is a helper function for K0(A). It changes MATLAB's two
% parameter function besselk(0,x) into a one parameter function
% besselk0(,x). This is because funm accepts only one parameter functions.
f = besselk(0,x);

function h = fault(T1,T2,c1,c2,Q,r1,r2,R);
% function h = fault(T1,T2,c1,c2,Q,r1,r2,R) computes the drawdown vector h
% at an observation point located at r1 m from the well and at r2 m from the
% mirror well, according to (36) and (37).
T1 = T1(:); T2 = T2(:); c1 = c1(:); c2 = c2(:); Q = Q(:);
A1 = sysmat(T1,c1);
if r1 < r2 % then equation (36):
h = 1/(2*pi)*(K0(r1*sqrtm(A1))-K0(r2*sqrtm(A1)))*(Q./T1) ...
    - sum(Q)/(pi*(sum(T1)+sum(T2)))*log(r2/R)*ones(length(T1),1);
else % equation (37):
    h = - sum(Q)/(pi*(sum(T1)+sum(T2)))*log(r1/R)*ones(length(T1),1);
end

```